Disponible a un clic de distancia y sin publicidad



Suscríbete

Sí este material te es útil,
ayúdanos a mantenerlo online

Comparte

Comenta

Que no se apague

Este material está en línea porque creo que a alguien le puede ayudar.
Lo desarrollo y sostengo con recursos propios.
Ayúdame a continuar en mi locura de compartir el conocimiento.

Ecuaciones diferenciales de Zill. Sección 6.1

Solución en serie de potencia centrada en x=0 con condiciones iniciales

En los problemas 29 a 32, use el método de series de potencias para resolver el problema con valores iniciales.

29. $(x-1)y'' - xy' + y = 0 \qquad y(0) = -2 \qquad y'(0) = 6$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$

$(x-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$

$k = n-1 \to n = k+1$ si $n=2 \to k=1$ $\qquad k = n-2 \to n = k+2$ si $n=2 \to k=0$ $\qquad k = n \qquad k = n$

$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \cdot k \, c_{k+1} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k \cdot x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$

$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) k \cdot c_{k+1} \cdot x^k - 2 \cdot 1 \, c_2 - \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k = 0$

$-2c_2 + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1) \cdot k \cdot c_{k+1} - (k+2)(k+1) c_{k+2} - k c_k + c_k \right] x^k = 0$

$-2c_2 + c_0 = 0 \qquad c_2 = \frac{1}{2} c_0 \qquad k(k+1) \cdot c_{k+1} - (k+2)(k+1) c_{k+2} - c_k (k-1) = 0$

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1)}{(k+2)(k+1)} c_{k+1} - \frac{(k-1)}{(k+2)(k+1)} c_k \qquad k = 1, 2, 3$$

si $c_0 = 0 \quad c_1 = 1 \longrightarrow c_2 = 0$

si $k=1 \quad c_3 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} c_2 - 0 \Rightarrow c_3 = 0$

si $k=2 \quad c_4 = \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3} c_3 - \frac{1}{4 \cdot 3} \cdot c_2 = 0 + 0 = 0 \quad c_4 = 0$

$y_1(x) = x$ //

si $c_0 = 1 \quad c_1 = 0 \quad c_2 = \frac{1}{2}$

si $k=1 \quad c_3 = \frac{1}{3} \cdot c_2 - 0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

si $k=2 \quad c_4 = \frac{2}{4} \cdot c_3 - \frac{1}{4 \cdot 3} \cdot c_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$

$y_2(x) = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + \cdots$

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad y(0) = -2 \qquad y'(0) = 6$

$y(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = -2 \longrightarrow c_2 = -2$

$y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \left(x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \cdots \right)$

$y'(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 = 6 \qquad c_1 = 6$

$y(x) = 6x - 2\left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + \cdots \right)$

www.klasesdematematicasymas.com